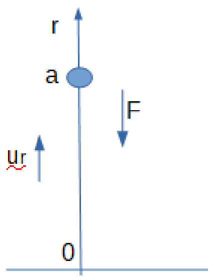
Tempo di caduta di un corpo in un campo centrale

Tempo di volo di un razzo per raggiungere l'altezza massima

Tempo di collisione di due corpi nello spazio

1) Una particella di massa m si muove in un campo di forza centrale $\boldsymbol{F} = \frac{k}{r^n}(-\boldsymbol{u}_r)$, in cui k ed n sono costanti positive. Essa parte da ferma da un punto r = a ed arriva in r = 0 con modulo di velocità finita v_0. Dimostrare che la velocità in 0 è $v_0^2 = \frac{2k}{m}\frac{a^{1-n}}{1-n}$ e che n deve essere minore di 1.



Notiamo innanzitutto che per r = 0 la forza diverge, quindi è, più che altro, un problema di tipo matematico. Applicando la seconda legge della dinamica si ha

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = -\frac{k}{r^n}\boldsymbol{u}_r \qquad (1)$$

essendo il problema unidimensionale possiamo scrivere

$$m\frac{dv}{dt} \equiv m\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} \equiv mv\frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^n}$$ e quindi

$$mvdv = -\frac{k}{r^n}dr$$ integrando da 0 a v_0 (la particella parte da ferma) e da "a" a 0 si ha (2)

$$\int_0^{v_0} mvdv = -\int_a^0 \frac{k}{r^n}dr$$

tenendo conto che l'integrale a secondo membro è convergente solo per n < 1, si ha

$$m\frac{1}{2}v_0^2 = -k\frac{a^{-n+1}}{n-1}$$ ossia

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}\frac{a^{1-n}}{1-n}} \quad con\ n<1 \qquad (3)$$

E' chiaro che la condizione n < 1 è venuta fuori dalla nostra richiesta "matematica" di voler calcolare la velocità nell'origine dove la forza diverge.

Occorre precisare che non è che la soluzione di questo particolare problema imponga la non esistenza di forze con n >1, ma solo che se si ammette che, nelle condizioni indicate, il corpo riesca ad arrivare a r=0 con una velocità finita allora in questo caso e solo in questo caso deve essere n<1.

E' semplice vedere (vedi più avanti) che questo non accade ad esempio con la forza gravitazionale (beninteso nell'ambito della meccanica classica e assumendo puntiforme e fissa la massa centrale).

Variante del problema 1

Togliamo la restrizione che la velocità sia finita nell'origine ed imponiamo allora che sia n > 1.

Proponiamoci di calcolare il tempo di caduta.

Riprendiamo la (2) senza specificare gli estremi di integrazione, ossia considerando gli integrali indefiniti, e per comodità scriviamo al posto di n, p + 1 con la condizione p > 0.

$$F = -\frac{k}{r^{p+1}}$$

$\int mv\,dv = -\int \frac{k}{r^{p+1}}dr$ la cui soluzione è

$$m\frac{1}{2}v^2 = -k\frac{r^{-p}}{-p} + c$$

$$v^2 = \frac{2k}{m}\frac{1}{pr^p} + c \qquad (4)$$

Sfruttiamo ora la condizione iniziale (r(0) = a e v(0) = 0) per determinare la costante di integrazione,

$0 = \frac{2k}{m}\frac{1}{pa^p} + c$ da cui $c = -\frac{2k}{mpa^p}$ allora la (4) diventa

$$v(r)^2 = \frac{2k}{m}\frac{1}{pr^p} - \frac{2k}{mpa^p} \qquad (5)$$

Notiamo per inciso che nell'origine, essendoci una singolarità, la velocità sarebbe infinita (questo problema è in effetti una esercitazione matematica). Procediamo allora nel calcolare il tempo, estraendo la radice quadrata da ambo i membri, separando le variabili ed integrando:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2k}{mpr^p} - \frac{2k}{mpa^p}} = \pm\sqrt{\left(\frac{2k}{mp}\right)\left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}$$

$$\int_a^0 \frac{dr}{\pm\sqrt{\left(\frac{2k}{mp}\right)\left(\frac{1}{r^p} - \frac{1}{a^p}\right)}} = \int_0^T dt$$

Considerando che con il trascorrere del tempo r dimunuisce, sopravvive il segno negativo:

$$T=-\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_a^0 \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r^p}-\frac{1}{a^p}\right)}} \tag{6}$$

dove è chiaro che il radicando è sicuramente positivo in quanto r < a per ipotesi.

Il problema consiste ora nel risolvere l'integrale.

Facciamo qualche elucrubazione algebrica al fine di semplificare un po' l'integrale

$\frac{1}{r^p}-\frac{1}{a^p}=\frac{a^p-r^p}{r^p a^p}=\frac{a^p}{r^p a^p}-\frac{r^p}{r^p a^p}=\frac{a^p}{r^p a^p}-\frac{1}{a^p}=\frac{1}{a^p}\left(\frac{a^p}{r^p}-1\right)$, quindi

$$T=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}\int_a^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a^p}\left(\frac{a^p}{r^p}-1\right)}}=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}\int_a^0 \frac{\sqrt{a^p}\,dr}{\sqrt{\left(\frac{a^p}{r^p}-1\right)}}=$$

Ora operiamo la sostituzione di variabile r/a = u, quindi dr = a du, avendosi

$$T=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}\int_a^0 \frac{a^{p/2}dr}{\sqrt{\left(\left(\frac{a}{r}\right)^p-1\right)}}=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}a^{p/2}\int_1^0 \frac{adu}{\sqrt{\frac{1}{u^p}-1}}=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}a^{(p/2)+1}\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u^p}-1}}$$

Ora facciamo una ulteriore sostituzione ponendo $x = u^p$, quindi $dx = pu^{p-1}$ du e du = $x^{1/p}$ dx/px

$$T=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}a^{(p/2)+1}\int_1^0 \frac{\sqrt{u^p}\,du}{\sqrt{1-u^p}}=-\sqrt{\frac{mp}{2k}}a^{(p/2)+1}\int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\frac{x^{1/p}\,dx}{px}=-\sqrt{\frac{m}{2kp}}a^{(p/2)+1}\int_1^0 x^{(1/p+1/2-1)}\,(1-x)^{-1/2}dx$$

$$T=\sqrt{\frac{m}{2kp}}a^{(p/2)+1}\int_0^1 x^{(1/p-1/2)}\,(1-x)^{-1/2}dx \tag{7}$$

Ora chiamiamo in soccorso la funzione beta di Eulero, così definita

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

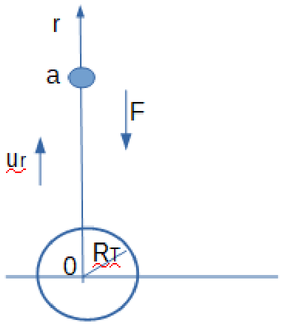
nel nostro caso si ha: m – 1 = 1/p – ½ ed n – 1 = – ½,

quindi m = 1/p + ½ ed n = ½,

perciò in definitiva abbiamo che il tempo di caduta vale (il valore della funzione beta di Eulero è tabellata, e si può valutarla con un software di calcolo).

$$T=\sqrt{\frac{m}{2kp}}a^{(p/2)+1}\beta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \tag{8}$$

2) Consideriamo ora il problema "fisico" di quello precedente, pensiamo per fissare le idee al caso gravitazionale: il corpo "sorgente" della forza centrale deve avere una dimensione finita, quindi deve avere un certo raggio, pensiamo al seguente problema. A seguito di un urto con un meteorite, un satellite geostazionario viene completamente fermato e inizia a cadere in verticale sulla Terra, come illustrato nella figura seguente. Calcolare il tempo di caduta T.



Assumiamo un asse nel piano che congiunge il satellite al centro Terra che ruoti insieme con essa. Su questo asse assumiamo una coordinata radiale r (unica variabile nel moto), quindi siamo davanti ad un problema ad un sol corpo.

Allora integrando la (2)

con la condizione iniziale r(0) = a e v(0) = 0 e con la condizione finale r(T) = R_T e v(T) = v_0 si ha

$$\int_0^{v_0} mv dv = -\int_a^{R_T} \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = -GM_T \left[\left(-\frac{1}{r} \right) \right]_a^{R_T} = -GM_T \left(-\frac{1}{R_T} + \frac{1}{a} \right) = GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)$$

Dove il secondo membro è sicuramente positivo in quanto a > R_T per ipotesi. Dunque la velocità in R_T vale

$$v_0 = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)} \tag{9}$$

(poniamo $k \equiv GM_T = gR_T^2 \approx 4 \cdot 10^{14}$)

$$v_0 = \sqrt{2k \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a} \right)}$$

Come già osservato a margine della relazione (3), se in questa relazione pensassimo M "sorgente della forza centrale" come puntiforme (R_T = 0), si avrebbe una velocità infinita nell'origine.

Facciamo un esempio numerico, considerando dunque un satellite geostazionario che si fermasse istantaneamente ed iniziasse quindi il suo moto unidimensionale di caduta,

sia: a = 42.000 km ed R_T = 6.400 km.

Allora la sua velocità di impatto sulla superficie terrestre sarebbe

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}\left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{4.2 \cdot 10^7}\right)} = 10.3\ km/s \tag{10}$$

Se mandiamo "a" ad infinito abbiamo (è la sitazione simmetrica del lancio di un grave dalla superficie della Terra ad infinito):

$$v_0 = \sqrt{8 \cdot 10^{14}\left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - \frac{1}{\infty}\right)} = \sqrt{8 \cdot 10^{14}\left(\frac{1}{6.4 \cdot 10^6} - 0\right)} = 11.2\ km/s$$

Ritrovando così il noto risultato della velocità di fuga di un satellite lanciato dalla superficie terrestre.

Ritorniamo al nostro quesito. Impostiamo il problema, del calcolo del tempo, partendo da

F = ma = – GMm/r^2,

essendo un problema unidimensionale si ha

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -GM_T m\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -GM_T\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2} \tag{11}$$

Risolviamo questa "banale" eq. differenziale del secondo ordine non lineare, sapendo che le condizioni al contorno sono

$r_{in} \equiv a$ = 42000 km = $4.2 \cdot 10^7$m v_{in} = 0

$r_{fin} \equiv R_T$ = 6400 km = $6.4 \cdot 10^6$m v_{fin} = 10.3 km/s   come calcolato nella (10)

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy:

$$\ddot{r}(t) = -\frac{k}{r^2}$$
$$r(0) = a$$
$$\dot{r}(0) = 0$$

Conviene moltiplicare ambo i membri per $2\dot{r}$ ottenendo

$2\dot{r}\ddot{r} = -\frac{2\dot{r}k}{r^2}$ così si ha che il primo membro è diventato $\frac{d}{dt}(\dot{r})^2 = 2\dot{r}\ddot{r}$ quindi possiamo scivere

$$\frac{d}{dt}(\dot{r})^2 = -\frac{2k}{r^2}\dot{r}$$ ed integrando

$$v^2 \equiv (\dot{r})^2 = -2k\int \frac{\dot{r}}{r^2}dt = -2k\int \frac{dr}{dt}\frac{1}{r^2}dt = -2k\int \frac{1}{r^2}dr = \frac{2k}{r} + c_1$$

Imponendo la condizione iniziale di velocità nulla in r = a, ricaviamo c_1

$$0 = c_1 + \frac{2k}{a} \Rightarrow c_1 = -\frac{2k}{a}$$

$$v^2 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)} \tag{12}$$

A questa relazione si arriva anche dalla conservazione dell'energia, infatti, uguagliando l'energia iniziale con quella in un puno generico r:

E_{in} = E(r)

$K_{in} + U_{in}$ = K(r) + U(r)

$0 - GM_T\, m/a^2 = ½\, m\, v^2 - GM_T\, m/r^2$

$½\, m\, v^2 = GM_T\, m/r^2 - GM_T\, m/a^2$

$v^2 = 2GM_T/r^2 - 2GM_T/a^2$ da cui la (12), ove si ricordi che $k = GM_T$.

Ora occorre considerare che nel nostro SR la velocità diminuisce con l'aumentare del tempo per cui deve aversi v(r) = – dr/dt, cioè in sostanza occore togliere il segno più al secondo membro della (12).

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$-\frac{dr}{\sqrt{2k}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = dt$$

$$\int_0^T dt = -\int_{r_{in}}^{r_{fin}} \frac{dr}{\sqrt{2k}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} = -\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_a^{R_T} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T}^{a} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}} \tag{12 bis}$$

risolvendo l'integrale (con il programma di calcolo Wolfram) si ha

$$T=\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[a^{3/2}\left(-\arctan\left(\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}\right)\right)-ar\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}\right]_{R_T}^{a}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[a^{3/2}\arctan\left(\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{R_T}-\frac{1}{a}}\right)+aR_T\sqrt{\frac{1}{R_T}-\frac{1}{a}}\right] \qquad (13)$$

Inserendo i valori numerici abbiamo

$$T=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 4\cdot 10^{14}}}\left(\begin{array}{l}(4.2\cdot 10^{7})^{3/2}(\arctan\left(\sqrt{4.2\cdot 10^{7}}\sqrt{\frac{1}{6.4\cdot 10^{6}}-\frac{1}{4.2\cdot 10^{7}}}\right)+\\ +4.2\cdot 10^{7}\cdot 6.4\cdot 10^{6}\sqrt{\frac{1}{6.4\cdot 10^{6}}-\frac{1}{4.2\cdot 10^{7}}}\end{array}\right)=$$

$$=35.4\cdot 10^{-9}[(2.72\cdot 10^{11}(\arctan(6480\cdot 0.00036)+269\cdot 10^{12}(0.00036)]=$$

$$=35.4\cdot 10^{-9}(2.72\cdot 10^{11}\cdot 1.16+0.97\cdot 10^{11})=35.4\cdot 10^{-9}\cdot 4.12\cdot 10^{11}=4.1\,h$$

T = 4.1 h

La soluzione (13) può anche essere scritta in modo leggermente diversa, rinunciando all'uso del programma di calcolo e risolvendo l'integrale "a mano", infatti:

$$T=-\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{a}^{R_T}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T}^{a}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T}^{a}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{a}{r}-1\right)}}=\sqrt{\frac{a}{2k}}\int_{R_T}^{a}\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{a}{r}-1\right)}}$$

Operiamo la sostituzione r/a = u cioè dr = a du con gli estremi che cambiano da R_T/a = 0.152 ad 1

$$T=\sqrt{\frac{a}{2k}}\int_{R_T/a}^{1}\frac{a\,du}{\sqrt{1/u-1}}=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\int_{R_T/a}^{1}\frac{du}{\sqrt{1/u-1}}=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left[-u\sqrt{\frac{1}{u}-1}-\arctan\sqrt{\frac{1}{u}-1}\right]_{R_T/a}^{1}$$

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left[\frac{R_T}{a}\sqrt{\frac{a}{R_T}-1}+\arctan\sqrt{\frac{a}{R_T}-1}\right] \qquad (14)$$

Inserendo i valori numerici si ha

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left[0.152\sqrt{\frac{1}{0.152}-1}+\arctan\sqrt{\frac{1}{0.152}-1}\right]=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}(0.152\cdot 2.36+\arctan 2.36)=$$
$$=\sqrt{\frac{(42\cdot 10^6)^3}{2\cdot 4\cdot 10^{14}}}(0.359+1.17)=9623\cdot 1.53=14690\,s=4.1\,h$$

T = 4.1 h

Vi è ancora un modo diverso di arrivare alla soluzione facendo delle opportune sostituzioni nel calcolo dell'integrale. Ripartendo dalla (12 bis), facendo la sostituzione: x = r/a, dx=(1/a)dr si ha

$$T=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T/a}^{1}\frac{a\,dx}{\sqrt{\frac{1}{ax}-\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T/a}^{1}\frac{a\,dx}{\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x}-1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T/a}^{1}\frac{\sqrt{a}\,a\,dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)}}=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\int_{R_T/a}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)}}=$$

Facendo una ulteriore sostituzione: $x = y^2$, $dx = 2y\,dy$ si ha

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\int_{\sqrt{R_T/a}}^{1}\frac{2y\,dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{y^2}-1\right)}}=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\int_{\sqrt{R_T/a}}^{1}\frac{2y^2\,dy}{\sqrt{\left(1-y^2\right)}}=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\,2\left[-\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_{\sqrt{R_T/a}}^{1}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left[-y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y\right]_{\sqrt{R_T/a}}^{1}=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left(0+\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{R_T}{a}}\sqrt{1-\frac{R_T}{a}}-\arcsin\sqrt{\frac{R_T}{a}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1-\frac{R_T}{a}\right)}+\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{R_T}{a}}\right)=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1-\frac{R_T}{a}\right)}+\arccos\sqrt{\frac{R_T}{a}}\right)$$

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1-\frac{R_T}{a}\right)}+\arccos\sqrt{\frac{R_T}{a}}\right)\qquad(15)$$

Avendo sfruttato la relazione $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$.

La (15) è analoga a quella seguente fornita dal testo "Meccanica razionale" di Murray R. Spiegel (collana Schaum's), che propone il problema simmetrico al nostro, dove viene chiesto il tempo occorrente ad un razzo che parta verticalmente con velocità v_0 ad arrivare alla quota massima h (dove h è la quota rispetto alla superficie terrestre):

$$T = \sqrt{\frac{R_T + h}{2g}} \left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T + h}{2R_T} \arccos\left(\frac{R_T - h}{R_T + h} \right) \right] \tag{16}$$

Facciamo vedere l'uguaglianza fra la (15) e la (16). Riportiamo la (16) riferita alla distanza "a" dall'origine (centro della Terra) anziché alla quota h rispetto alla superficie terrestre, essendo

$h = a - R_T$ e $g = k/R_T^2$ si ha

$$T = \sqrt{\frac{a}{2k / R_T^2}} \left[\sqrt{\frac{a - R_T}{R_T}} + \frac{a}{2R_T} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a} \right) \right]$$

$$T = \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{a}{R_T} \right)\left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \frac{a}{R_T} \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a} \right) \right]$$

$$T = \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \left[\frac{a}{R_T} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right)\left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a} \right) \right) \right]$$

$$T = \sqrt{\frac{aR_T^2}{2k}} \frac{a}{R_T} \left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right)\left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a} \right) \right)$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}} \left[\sqrt{\left(\frac{R_T}{a} \right)\left(1 - \frac{R_T}{a} \right)} + \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a} \right) \right] \tag{17}$$

Adesso facciamo vedere che vale la seguente uguaglianza

$$\frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2R_T - a}{a} \right) = \arccos \sqrt{\frac{R_T}{a}} \tag{18}$$

ponendo $R_T/a = x$ si ha

$\arccos(2x - 1) = 2 \arccos \sqrt{x}$ applicando la funzione coseno ad ambo i membri si ha:

$$(2x - 1) = \cos(2 \arccos \sqrt{x})$$

ricordando che $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ si ha

$$2x - 1 = \cos(2 \arccos \sqrt{x}) = 2\cos^2(\arccos \sqrt{x}) - 1 = 2x - 1$$

Abbiamo così verificato l'uguaglianza, appena si ricordi che per definizione di arcocoseno si ha

$$\cos^2(\arccos \sqrt{x}) = x$$

Dunque la (17) può essere scritta in modo più compatto così:

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left[\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1-\frac{R_T}{a}\right)}+\arccos\sqrt{\frac{R_T}{a}}\right] \tag{19}$$

Ritrovando la (15).

Verifica numerica della (15)

$$T=\sqrt{\frac{(4.2\cdot 10^7)^3}{2\cdot 4\cdot 10^{14}}}\left[\sqrt{\left(\frac{6.4\cdot 10^6}{4.2\cdot 10^7}\right)\left(1-\frac{6.4\cdot 10^6}{4.2\cdot 10^7}\right)}+\arccos\sqrt{\frac{6.4\cdot 10^6}{4.2\cdot 10^7}}\right]$$

$$T=9623\left[\sqrt{0.152\left(1-0.152\right)}+\arccos\sqrt{0.152}\right]=9623(0.359+1.17)=4.1h$$

T = 4.1 h

Calcoliamo per curiosità, la predizione del tempo di caduta dalla relazione (8) che ci dà <u>il tempo fino al centro della Terra</u>: $k = GM_Tm$ e $p = 1$ (valore della funzione beta calcolato con un software di calcolo):

$$T=\sqrt{\frac{m}{2GM_Tmp}}a^{(p/2)+1}\beta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2GM_T}}a^{3/2}\beta\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2\cdot 4\cdot 10^{14}}}(4.2\cdot 10^7)^{1.5}\cdot 1.57=$$
$$=35.35\cdot 10^{-9}\cdot 272\cdot 10^9\cdot 1.57=4.2h$$

Quindi il modello delle masse puntiformi ci fornisce un risultato inattendibile, (4.2 ore è il tempo di caduta fino ad R_T non fino al centro della Terra) poiché in quel problema il centro della forza era considerato privo di massa, a riprova che era un problema di tipo matematico.

Contro l'ingegno la forza bruta non può nulla.

Se anziché usare la forza bruta dell'analisi matematica, si fosse accesa la lampadina dell'intuizione ingegnosa, si sarebbe risparmiata tanta fatica. Infatti ricorrendo alla terza legge di Keplero il problema si risolve immediatamente. Infatti basta considerare il modo di caduta del satellite come un'orbita ellittica collassata in un segmento di estremi "a" ed O. Quindi il valore del semiasse maggiore è pari ad a/2, ed il suo periodo è T. Allora detto T_0 il periodo orbitale del satellite si ha

$$\frac{T_0^2}{a^3} = \frac{T^2}{(a/2)^3} \tag{20}$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{T_0^2}{a^3}} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}} \tag{21}$$

Per definizione di orbita geostazioaria il satellite artificiale deve percorrere l'orbita circolare in un tempo uguale al giorno siderale, $T_{\text{giorno siderale}}$ = 23 h 56 min = 86160 s.

$$T == \frac{86160}{2\sqrt{2}} = 8.4\,h$$

Ma il satellite non compie un'orbita (collassata) intera, ma solo metà, quindi il tempo di caduta è la meta di T, percio il risultato è

t = T/2 = **4.2 h**

N.B. Se non si conosce il valore di T_0 lo si può ricavare facilmente dalla relazione F = ma, che nel caso del satellite diventa (trascurando il segno): $GM_t\, m/a^2 = mv^2/r$ da cui $v = (GM_T/a)^{1/2}$ e quindi il periodo è

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi a}{\sqrt{GM_T/a}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(42.168\cdot 10^6)^3}{3.9857\cdot 10^{14}}} \simeq 86160\,s$$

Avendo usato i valori più corretti per $a = 42.168\cdot 10^6$ m e $M_T = 5.972\cdot 10^{24}$ kg

----

Ricapitolando abbiamo quattro relazioni equivalenti fra loro: (13), (14), (15) (16); per il calcolo del tempo di discesa (o ascesa) di un corpo lasciato cadere (o lanciato) sulla (o dalla) superficie terrestre verticalmente (dove “a” è la distanza riferita al centro della Terra, ed R_T il raggio terrestre).

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}}\left[a^{3/2}\arctan\left(\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{R_T}-\frac{1}{a}}\right)+aR_T\sqrt{\frac{1}{R_T}-\frac{1}{a}}\right]$$

$$T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{T_0^2}{a^3}} = \frac{T_0}{2\sqrt{2}}\ \textit{essendo}\ T_0\ \textit{il periodo orbitale del satellite}$$

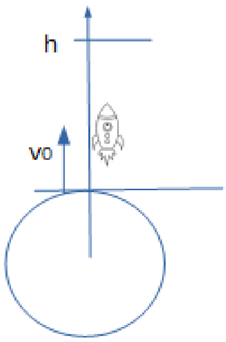
$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2k}}\left(\sqrt{\left(\frac{R_T}{a}\right)\left(1-\frac{R_T}{a}\right)}+\arccos\sqrt{\frac{R_T}{a}}\right)$$

$$T = \sqrt{\frac{R_T+h}{2g}}\left[\sqrt{\frac{h}{R_T}}+\frac{R_T+h}{2R_T}\arccos\left(\frac{R_T-h}{R_T+h}\right)\right]\ (\textit{riferita alla quota h rispetto alla superficie terrestre})$$

Problema simmetrico

2bis) Si calcoli il tempo di volo di un razzo che raggiunga l'altezza massima h dalla superficie terrestre.

Il moto inizia con velocità iniziale v_0 verticalmente.



Per simmetria al problema precedente possiamo affermare che il tempo di volo è quello già ricavato precedentemente, ma a noi interessa ora ricavarlo direttamente.

Possiamo intanto ricavare l'espressione dell'altezza massima raggiunta dal razzo che sarà ovviamente in funzione della velocità iniziale.

Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica.

$$E_{in} = E_{fin}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0 - G\frac{M_T m}{a}$$

$$v_0^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2GM_T}{R_T} - \frac{2GM_T}{a} \quad \Rightarrow \frac{2GM_T}{a} = \frac{2GM_T}{R_T} - v_0^2 = \frac{2GM_T - R_T v_0^2}{R_T}$$ invertendo

$$\frac{a}{2GM_T} = \frac{R_T}{2GM_T - R_T v_0^2}$$

$$a = \frac{2kR_T}{2k - R_T v_0^2} \tag{22}$$

Oppure, sostituendo k con g R_T^2:

$$a = \frac{2gR_T^2}{2gR_T - v_0^2}$$

Affinchè il denominatore sia positivo deve essere $v_0 < (2gR_t)^{1/2}$ = velocità di fuga = 11 km/s, infatti se la velocità è pari alla velocità di fuga la distanza dalla Terra va ad infinito, ossia esce dall'attrazione terrestre.

Volendo esprimere questo risultato in funzione dell'altezza h dalla superficie terrestre, si ha

$$a \equiv R_T + h = \frac{2gR_T}{2gR_T - v_0^2}$$

$$h = \frac{2gR_T}{2gR_T - v_0^2} - R_T = \frac{2gR_T - 2gR_T + R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2}$$

$$h = \frac{R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} \tag{23}$$

Es. numerico per v_0 = 3 km/s si ha

$$h = \frac{R_T v_0^2}{2gR_T - v_0^2} = \frac{6.4 \cdot 10^6 \cdot (3 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 9.8 \cdot 6.4 \cdot 10^6 - (3 \cdot 10^3)^2} \approx 500\, km$$

Partiamo come al solito dalla seconda legge della Dinamica.

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = -G\dfrac{M_T m}{r^2}\boldsymbol{u}_r$ essendo il problema uinidimensionale, si ha

$m\dfrac{dv}{dt} \equiv m\dfrac{dv}{dr}\dfrac{dr}{dt} \equiv mv\dfrac{dv}{dr} = -G\dfrac{M_T m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{k}{r^2}$ (con $k \equiv GM_T = gR_T^2 \approx 4 \cdot 10^{14}$)

$$vdv = -\frac{k}{r^2}dr$$

$$\int vdv = -\int \frac{k}{r^2}dr$$

$$\frac{1}{2}v^2 = -\left(-\frac{k}{r}\right) + c_1 = \frac{k}{r} + c_1$$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + c_1$$

Sfruttando le condizioni iniziali $r(0) = R_T$ e $v(0) = v_0$ si ha $c_1 = v_0^2 - \dfrac{2k}{R_T}$

$$v^2 = \frac{2k}{r} + (v_0^2 - \frac{2k}{R_T}) \tag{24}$$

Ora è utile avere un'espressione che non contempli v_0 ma sia in funzione del parametro "a".

A tal uopo utilizziamo la (22)

$$a = \frac{2kR_T}{2k - R_T v_0^2} \;; \quad 2ka - aR_T v_0^2 = 2kR_T \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{2ka - 2kR_T}{aR_T}$$

Dunque la (24) diventa

$$v^2 \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{r} + (\frac{2ka - 2kR_T}{aR_T} - \frac{2k}{R_T}) = \frac{2k}{r} + (\frac{2ka - 2kR_T - 2ka}{aR_T}) = \frac{2k}{r} - \frac{2k}{a}$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$

Siccome r aumenta con il tempo occorre scegliere il segno positivo,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}$$

Separando le variabili

$$\frac{dr}{\sqrt{2k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}} = dt$$

Integrando (utilizzando il programma di calcolo Wolfram)

$$\int_0^T dt = \int_{R_T}^{a} \frac{dr}{\sqrt{2k\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R_T}^{a} \frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2k}}\left[a^{3/2}\left(-\arctan\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}\right) - ar\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{a}}\right]_{R_T}^{a} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2k}}\left(a^{3/2}\arctan\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R_T}} + aR_T\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R_T}}\right)$$

Riottenendo la (13) e quindi per quanto già visto sopra, la soluzione proposta dal testo di cui sopra.

$$T = \sqrt{\frac{R_T+h}{2g}}\left[\sqrt{\frac{h}{R_T}} + \frac{R_T+h}{2R_T}\arccos\left(\frac{R_T-h}{R_T+h}\right)\right]$$

Vediamo per curiosità, dopo questo exursus sul moto di un corpo in un campo centrale, quale errore si commetterebbe (nel caso di caduta), supponendo che l'accelerazione rimanesse costante al valore iniziale (nel punto "a"). Supponendo costante il valore dell'accelerazione (mentre in effetti aumenta), ci aspettiamo un tempo superiore a quello effettivo. Per non far confusione con la notazione usiamo, per questo calcolo, il simbolo h per indicare la distanza "a".

Nel punto "h" si ha $F(h) = G\frac{M_T m}{h^2} = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{GM_T}{h^2} = \frac{4\cdot 10^{14}}{(42\cdot 10^6)^2} = 0.23\, m/s$ ed allora

dalla relazione s = ½ a t^2 ricaviamo il tempo

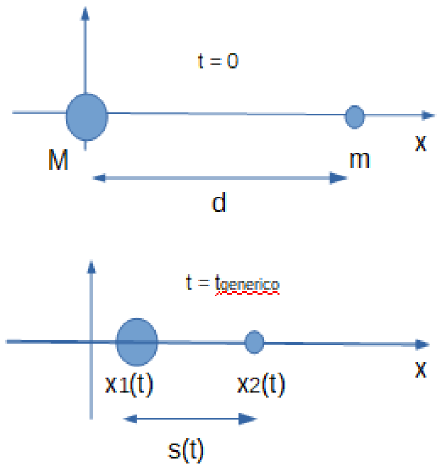
$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 35.6\cdot 10^6}{0.23}} = 4.9\, h$$

Quindi l'errore (in eccesso, come atteso, essendo il moto più lento), è di 0.7 ore, ossia 42 min.

3) Quanto tempo ci impiegano due oggetti, di massa M ed m, di raggio R e r, posti ad una distanza d, a toccarsi nello spazio a causa dell'attrazione gravitazionale?

Si facciano le seguenti ipotesi: assenza di attrito; $d > r + R$; le velocità iniziali degli oggetti siano nulle (cambierebbe pochissimo se le velocità fossero allineate sulla congiungente delle due masse).

Il problema è di fatto un problema e una dimensione. Rappresentiamo la situazione.



Le due masse si incontrano, nell'istante t, quando si avrà

$s(t) = x_2(t) - x_1(t)| = r + R$

dove x_1 e x_2 sono le posizioni della massa M e m rispettivamente, sull'asse x, che congiunge i due centri delle masse. Inoltre si pone l'origine del sistema di riferimento tale per cui $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = d$.

Per un sistema chiuso e isolato, come il nostro, su cui, cioè, non agisca nessuna forza esterna netta, la quantità di moto **P** rimane costante.

La forza netta è nulla in quanto

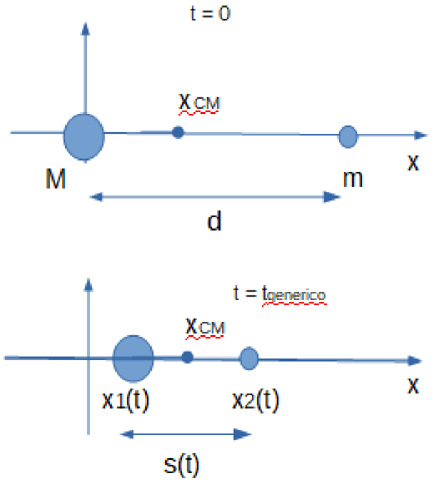
$$\boldsymbol{F}_{totale} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = G\frac{Mm}{s(t)}\boldsymbol{i} + G\frac{Mm}{s(t)}(\boldsymbol{-i}) = 0$$

Quindi essendo

$\mathbf{P} = (M + m)\,\mathbf{v}_{CM}$

la velocità del centro di massa rimane costante nel tempo, ciò significa che se le masse sono poste inizialmente ferme, come si è assunto, allora la velocità del centro di massa è nulla, per cui x_{CM} rimane fisso.

La situazione in questo sistema di riferimento è



Sul corpo di massa M agisce la forza gravitazionale esercitata dal corpo di massa m

$$\boldsymbol{F}_M = G\frac{Mm}{s(t)^2}\boldsymbol{i} = F(t)\boldsymbol{i}$$

per cui subirà una accelerazione

$$\boldsymbol{a}_M \equiv \boldsymbol{a}_1 = \frac{\boldsymbol{F}_M}{M} = \frac{F(t)}{M}\boldsymbol{i}$$

Sul corpo di massa m agisce la forza gravitazionale esercitata dal corpo di massa M

$$\boldsymbol{F}_m = -G\frac{Mm}{s(t)^2}\boldsymbol{i} = -F(t)\boldsymbol{i}$$

per cui subirà una accelerazione

$$\boldsymbol{a}_m \equiv \boldsymbol{a}_2 = \frac{\boldsymbol{F}_m}{m} = -\frac{F(t)}{m}\boldsymbol{i}$$

essendo

$$s(t) = x_2(t) - x_1(t);$$
$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}[x_2(t) - x_1(t)] = \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} - \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = a_2 - a_1$$

Il modulo dell’accelerazione relativa, cioè l’accelerazione della coordinata s(t), è

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}[a_2(t) - a_1(t)] = -\frac{F(t)}{m} - \frac{F(t)}{M} = -F(t)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = -F(t)\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) = -G\frac{Mm}{s(t)^2}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right) = -\frac{k}{s(t)^2}$$

Avendo posto

$$k = GMm\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = G(M+m)$$

Abbiamo dunque il seguente problema di Cauchy

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} \equiv \ddot{s} = -\frac{k}{s(t)^2}$$

Con le condizioni iniziali

s(0) = d

v(0) = ds(0)/dt = 0

Conviene moltiplicare ambo i membri per $2\dot{s}$ ottenendo

$2\dot{s}\ddot{s} = -\frac{2\dot{s}\,k}{s^2}$ così si ha che il primo membro diventa $\frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = 2\dot{s}\ddot{s}$ quindi possiamo scivere

$\frac{d}{dt}(\dot{s})^2 = -\frac{2k}{s^2}\dot{s}$ ed integrando

$$v^2 \equiv (\dot{s})^2 = -2k\int\frac{\dot{s}}{s^2}dt = -2k\int\frac{ds}{dt}\frac{1}{r^2}dt = -2k\int\frac{1}{s^2}ds = \frac{2k}{s}+c_1$$

Sfruttando le condizioni iniziali ricaviamo c_1:

$$0 = \frac{2k}{d}+c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{2k}{d}$$

$$v^2(t) \equiv \left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{s}-\frac{2k}{d} = 2k\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \pm\sqrt{2k\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}$$

Ora occorre considerare che nel nostro SR la velocità della coordinata s(t) diminuisce con l'aumentare del tempo (ds/dt < 0) per cui occore prendere il segno meno.

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\sqrt{2k\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{d}\right)}$$

separando le variabili ed integrando si ha

$$-\frac{ds}{\sqrt{2k}\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}=dt$$

$$\int_0^T dt=-\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{s_{in}}^{s_{fin}}\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}=-\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_d^{R+r}\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}$$

I corpi partono dalla distanza d ed arrivano a toccarsi quando s(T) = R + r

Integrando (utilizzando il programma di calcolo Wolfram)

$$T=\frac{1}{\sqrt{2k}}\int_{R+r}^{d}\frac{ds}{\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}}=\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[d^{3/2}\left(-\arctan\sqrt{d}\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}\right)-d\,s\sqrt{\frac{1}{s}-\frac{1}{d}}\right]_{R+r}^{d}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[d^{3/2}\left(\arctan\sqrt{d}\sqrt{\frac{1}{R+r}-\frac{1}{d}}\right)+d(R+r)\sqrt{\frac{1}{R+r}-\frac{1}{d}}\right]$$

Esempio numerico: sia M = 10^3 kg ; m = 10^2 kg; d = 10^3 m; R = 5 m; r = 1 m

Allora si ha

$$k=G(M+m)=6.67\cdot10^{-11}(10^3+10^2)=7.34\cdot10^{-8}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{2\cdot7.34\cdot10^{-8}}}\left[(1000^{3/2}\left(\arctan\sqrt{1000}\sqrt{\frac{1}{6}-\frac{1}{1000}}\right)+1000(R+r)\sqrt{\frac{1}{6}-\frac{1}{1000}}\right]$$

$$T=2.6\cdot10^3\left[(3.16\cdot10^4\cdot\arctan12.87+1000\cdot6\cdot0.41\right]$$

$$T=2.6\cdot10^3\left[(3.16\cdot10^4\cdot85.56+1000\cdot6\cdot0.41\right]=2.6\cdot10^3(2.70\cdot10^6+2.46\cdot10^3)$$

$$T=7.02\cdot10^9\,s=222\ anni$$